توابع خطا

تابع خطا[۱] با انتگرال

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt \tag{۱}$$

تعریف می شود که z متغیری مختلط است. این تابع مرتبط با تابع گامای ناقص و تابع فوق هندسی گاوس بوده و در نظریه خطا و نظریه احتمالات نیز ظاهر می شود. گلاشیر[۲] برای نخستین بار عنوان تابع خطا را روی این تابع به کار برد و در همان سال تابع خطای مکمل را معرفی نمود.

نکات ۱.۰

خواص تابع خطا عبارتند از:

$$\begin{array}{ll}
1) & \operatorname{erf}(x)\geqslant 0 \qquad ; \qquad x\geqslant 0\\
2) & \operatorname{erf}(0)=0\\
3) & \operatorname{erf}(\infty)=1 \qquad ; \qquad |\arg z|<\dfrac{\pi}{4}\\
4) & |\operatorname{erf}(x)|\leqslant 1 \qquad ; \qquad x\in\mathbb{R}\\
5) & \operatorname{erf}(x)=1-\dfrac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left(1-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1\times 3}{(2x^2)^2}-\dfrac{1\times 3\times 5}{(2x^2)^3}+\cdots\right)\\
6) & \operatorname{erf}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5\times 2!}-\cdots\right) \qquad ; \qquad |x|\ll 1\\
7) & \operatorname{erf}(-z)=-\operatorname{erf}(z)\\
8) & \operatorname{erf}(z)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\dfrac{1}{2},z^2\right)\\
9) & \operatorname{erfc}(z)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\dfrac{1}{2},z^2\right)
\end{array}$$

!

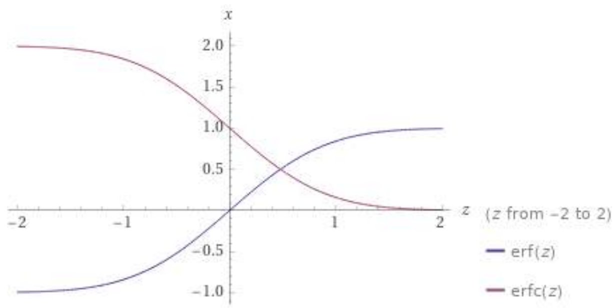
و در ارتباط با انتگرالهای فرنل نیز داریم

$$C(x)+iS(x)=\frac{1+i}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{\pi(1-i)}{2}x\right)$$

تابع خطای مکمل[۳] با تعریف

$$\operatorname{erfc}(x)=1-\operatorname{erf}(x) \tag{۲}$$

[1] Error Function
[2] J. W. L. Glaisher
[3] complementary error function



شکل ۱ نمودار $\mathrm{erf}(x)$ و $\mathrm{erfc}(x)$ در بازه $[-2,2]$.

مرتبط با تابع خطاست. نمودار ایندو در شکل ۱ آمده است. برای $|x| > 2$

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{(2x^2)^n}\right)$$